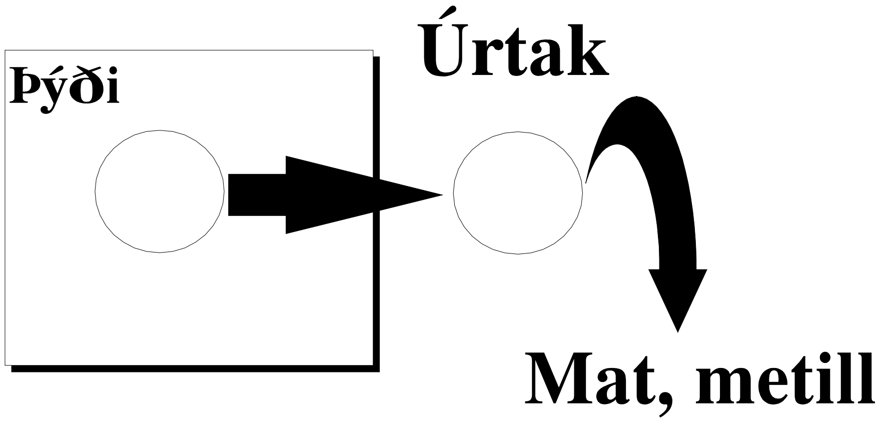
Efnisyfirlit

Í þessari stuttu yfirferð eru kynnt helstu atriði sem snerta tölfræðilega úrvinnslu markaðsrannsókna. Yfirferðin er á engan hátt tæmandi og gert er ráð fyrir að tölfræðileg þekking lesenda sé nokkur. Efninu er því fyrst og fremst ætlað til stuðnings við úrvinnslu gagna sem orðið hafa til í könnunum, t.d. viðhorfskönnun.

1. Úrtaksfræði

Hugtakið þýði, sem dregið er af orðinu þjóð, er skilgreint sem hópur einstaklinga eða hluta með sameiginleg mælanleg einkenni. Þetta leiðir hugann að hugtökunum “markhópur” og “markaðshlutun” en í raun er hér á ferðinni nokkuð tengd efni.

Úrtak er safn einstaklinga eða hluta sem á kerfisbundinn hátt er valið úr skilgreindu þýði í þeim tilgangi að leggja mat á hegðun/viðbrögð alls þýðisins. Þetta sést best á mynd.



Nú er nauðsynlegt að benda á að þessi hugtök, þ.e. úrtak og þýði, geta verið afstæð. Það sem í einu tilviki er þýði getur í öðru tilviki verið úrtak. Þannig eru t.d. nemendur í tilteknum bekk Tækniskólans úrtak úr þýðinu "íslenskir háskólanemar" en þetta úrtak gæti jafnfram verið þýði ef aðeins er verið að skoða viðkomandi bekk.

Mikilvægt er að hafa í huga að þýði getur verið tvennskonar, þ.e. endanlegt eða óendanlegt (stundum talað um lokað - opið). Dæmi um endanleg þýði eru iðnrekstrarfræðingar, viðskiptafræðingar, tæknifræðingar, verkfræðingar o.s.frv. Sé hins vegar krónupeningi kastað upp 100 sinnum fæst úrtak af stærðinni 100 úr þýði allra hugsanlegra kasta með þessum krónupening, en sá fjöldi er óendanlegur (þó ekki fræðilega!).

Úrtakið er valið þegar ekki er unnt að skoða alla einstaklinga þess þýðis sem við viljum rannsaka með tilliti til einhvers eiginleika. Þegar talað er um að ekki sé unnt að skoða alla einstaklinga þýðisins, er í raun átt við tvennt. Annars vegar getur verið fræðilega ómögulegt að ná til allra og hins vegar kann að vera fjárhagslega óhagkvæmt að hafa samband við alla einstaklinga þýðisins, t.d. vegna stærðar þess eða dreifingar.

Hér takast oft á tvö sjónarmið. Annars vegar ósk um fræðilega fullkomnum og því vilji til að taka sem stærst úrtak og svo hins vegar sjónarmið þeirra sem fjármagna rannsóknina en þeir vilja fá sem mestar upplýsingar með sem minnstum tilkostnaði.

Til að hægt sé að ákvarða úrtaksstærð, þá þurfa markmið könnunar að vera ljós. Er t.d. nóg að fá vísbendingar eða þurfa niðurstöður að vera tölfræðilega nákvæmar og háðar ákveðnu öryggisbili?

Hvort sem okkur líkar betur eða verr, þá er fjármagn og tími oftast takmarkaður með einhverjum hætti. Stundum óskar viðskiptavinurinn eftir því að gerð verði rannsókn, byggð á úrtaki með 200, 400, 600 stökum eða af einhverri annarri tilgreindri stærð. Stundum getur þessi ósk verið byggð á einhverri vitneskju um staðalfrávik eða á reynslu frá svipaðri rannsókn sem gerð hefur verið áður. Jafnframt getur ósk um úrtaksstærð einfaldlega verið byggð á óljósri tilfinningu um hvað sé heppileg stærð úrtaks.

Fjöldi undirhópa sem kanna á skiptir hér máli. Vera kann að úrtak með 400 stökum sé álitið nægjanlegt í tiltekinni rannsókn. Ef hins vegar á að kanna mismun á viðhorfi karla og kvenna og í sama úrtaki eru 50% karlar og 50% konur, þá er úrtakið aðeins 200 fyrir hvorn hóp. Nú kann að fara svo að úrtak með svo fáum stökum, gefi ekki þá tölfræðilegu nákvæmni sem óskað er eftir. Þessu til viðbótar gæti verið talið nauðsynlegt að kanna jafnframt mismun niðurstaðna með tilliti til kyns og aldurs.

Eftirfarandi gæti verið dæmi um undirhópa sem óskað er eftir að kanna sérstaklega.

- Karlar undir 35 ára
- Karlar 35 ára og eldri
- Konur undir 35 ára
- Konur 35 ára og eldri.

Ef skipting er jöfn milli þessara hópa, þá eru aðeins 100 einstaklingar í hverjum. Spurningin er því sú hvort að þetta séu nægjanlega stórir hópar svo hægt sé að gera þá tölfræðigreiningu sem markmið könnunar segir til um.

Að öðru óbreyttu þá gildir að eftir því sem undirhópar eru fleiri, því stærra þarf úrtakið að vera. Til viðmiðunar má segja að úrtak þarf að vera það stórt að mikilvægur undirhópur geti innihaldið a.m.k. 100 stök og þeir undirhópar sem ekki eru eins mikilvægir innihaldi 20 - 50 stök.

2. *Úrtaksaðferðir og stærð þeirra*

Eins og áður sagði þá er úrtaksrannsókn framkvæmd þegar heildarrannsókn er útilokuð. Því þarf að velja slembiúrtak sem gefið getur upplýsingar um heildar þýðið. Úrtaksrannsókn getur því í senn verið ódýr og fljótleg rannsóknaraðferð.

Eitt af mikilvægustu verkefnum þeirra sem framkvæma e.k. rannsókn, er að velja úrtak úr þýði, rannsaka það og túlka niðurstöður. Þessar niðurstöður eru oft á tíðum notaðar sem grunnur að ákvarðanatöku tengda rekstri fyrirtækis og afkomu þess.

Af framansögðu er ljóst að til þess að niðurstöður komi að gagni, verður úrtakið að vera dæmigert fyrir þýðið, þ.e. að endurspegla vilja þýðisins.

Til eru nokkrar aðferðir til að velja úrtök og verða hér kynntar þær fjórar aðferðir sem eru einna algengastar.

2.1. Handahófsúrtak

Grundvallarhugmyndin á bak við handahófsúrtök er sú að allar einingar þýðisins séu jafnlíklegar til að veljast í úrtakið.

Auðveldasta leiðin til að velja handahófsúrtök er að nota svokallaðar handahófstölur eða slembitölur. Slíkar tölur er hægt að fá með aðstoð tölvu eða með því að nota töflu með handahófstölum. Ef ætlunin er að velja handahófsúrtak 40 nemenda úr 400 manna skóla, t.d. Tækniskóla Íslands, væri einföld leið að auðkenna alla nemendur skólans með tölustöfunum 1, 2, ..., 400. Síðan væri hægt að fá tölvuútskrift með handahófstölum á þessu bili. Listinn gæti verið eftirfarandi:

30 slembitölur frá 1 til 400

278	240	277	201	213
309	32	265	316	33
63	300	312	289	166
93	176	288	275	369
321	50	11	392	159
46	58	386	12	285

Hér er búið að mynda slembiúrtak 30 nemenda úr þýðinu nemendur Tækniskóla Íslands. Einnig mætti hugsa sér að tekið yrði annað úrtak og þá fengnar nýjar tölur.

30 slembitölur frá 1 til 400

26	284	332	117	63
31	41	5	376	234
294	70	383	67	265
307	111	29	20	265
219	31	1	237	379
278	263	290	333	295

Önnur leið og frumstæðari væri að skrifa nöfn þessara 400 nemenda á miða og setja miðana í hatt, hrista vel og draga 30 miða upp úr hattinum.

2.2. Kerfisbundin úrtaka

Kerfisbundin úrtaka fer þannig fram að stökin eru valin úr þýðinu með jöfnu millibili. Sem dæmi þá má hugsa sér að ákveðið sé að taka viðtal við tíunda hvern nemanda. Einfaldast er að fara í skrá skólans og velja þar af handahófi eitt af fyrstu tíu nöfnunum og tíunda hvert nafn eftir það.

Á sama hátt má hugsa sér að gæðaeftirliti í framleiðslu væri þannig háttað að tekin væri hundraðasta hver eining og hún mæld, vigtuð eða gerðar aðrar þær prófanir sem nauðsynlegt kann að gera.

Mikilvægt er að hafa í huga að kerfisbundin úrtaka er ekki handahófsúrtaka samkvæmt ströngustu skilgreiningu. Því kann svo að fara að niðurstöður dreifist ekki normal og vera kann að niðurstaða, byggð á slíku úrtaki, gefi ranga mynd af hegðun þýðisins. Þetta er hægt að kanna með tölfræðilegum aðferðum og ef niðurstöður gefa tilefni til, þá er kerfisbundin úrtaka bæði fljótleg og ódýr og því oft um álitlegan kost að ræða.

2.3. Lagskiptingarúrtaka

Í Tækniskólanum er boðið upp á nám í raungreinadeild, heilbrigðisdeild, byggingadeild, véladeild og rekstrardeild. Gefum okkur að fjöldi nemenda í hverri deild sé eftirfarandi:

Deild	**Fjöldi**	**Hlutfall**
Raungr.d	40	10%
Heildbr.d.	60	15%
Byggingad.	70	17,5%
Vélad.	40	10%
Rekstrard.	190	47,5%
Samtals	400	100%

Gerum nú ráð fyrir að velja eigi úrtak 50 nemenda úr skólanum þannig að tryggt sé að í úrtakinu séu nemendur úr öllum deildum skólans. Þetta er hægt að gera með því að velja handahófsúrtak af hverju sviði og ræðst stærð úrtaksins af hlutfallslegum fjölda nemenda í hverri deild. Þar sem 10% nemenda eru í raungreinadeild þá veljast 5 nemendur af því sviði, 8 nemendur úr heilbrigðisdeild og svo koll af kolli.

Þetta ferli að skipta nemendum fyrst í deildir og velja síðan slembiúrtak úr hverri deild, kallast lagskiptingarúrtak og getur verið hentugt þegar við höfum einhverja vitneskju um samsetningu þýðisins og teljum að viðhorf sé mismunandi eftir því í hvaða deild nemandi er.

2.4. Klasaúrtaka

Klasaúrtaka byggist á því að þýðinu er skipt í hópa og síðan eru valin slembiúrtök úr hverjum hóp. Þessari aðferð svipar mjög til lagskiptingarúrtöku en samt er ákveðin eðlismunur þar á.

Lagskiptingarúrtaka er notuð þegar ætla má að lítill breytileiki sé innan hvers hóps en mikill milli hópa, þ.e. nemendur í rekstrardeild hafi allt aðra afstöðu en nemendur raungreinadeildar til tiltekinnar spurningar.

Klasaúrtaka er hins vegar notuð þegar búist er við því að breytileikinn sé mikill innan hvers hóps, en lítill milli hópa. Um þetta efni er betur fjallað í ANOVA-greiningu (analysis of variance) og vísað til þeirra fræða til frekari fróðleiks.

2.5. Stærð úrtaks

Til að ákvarða stærð úrtaks út frá tölfræðilegum forsendum, þarf þrennt:

1. Mat á staðalfráviki þýðis
2. Skilgreining á hámarks leyfilegri sveiflu (L)
3. Skilgreining á öryggisstigi (Z-gildi)

Tökum dæmi:

Framleiðslustjóri hjá Röragerðinni hf. hefur tekið upp hjá sér gæðaeftirlit og grundvallað á úrtaki með 9 stökum, hefur eftirfarandi öryggisbil fengist fyrir lengd ákveðins rörbúts:

$$[194,65;197,75]_{99\%}$$

Hér er um 99% öryggisbil fyrir lengd rörbúts, þ.e. segja má með 99% vissu að lengd hans sé á þessu bili.
Nú kann svo að vera að framleiðslustjóranum finnist að sveiflan sé of mikil (± 1,55 mm) til að nothæft sé og vill að sveiflan verði ± 0,5 mm. Hve stórt úrtak þarf til að vera viss um slíkt öryggisbil? Almennt gildir að eftir því sem úrtakið stækkar, því þrengra verður bilið, þ.e. vissan verður meiri.

Lausn:

Við vitum að L = 0,5, staðalfrávikið er gefið 1,8 og Z-gildið er 2,575 fyrir 99% öryggisbil. Nú má setja inn í eftirfarandi jöfnu:

$$n = \frac{\sigma^2 * \left(Z_{\alpha/2}\right)^2}{L^2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{(1{,}8)^2 * (2{,}575)^2}{0{,}5^2} = 86$$

Með sama hætti má reikna úrtaksstærð fyrir hlutfall en almenn jafna er eftirfarandi:

$$n = \frac{0{,}25 * \left(Z_{\alpha/2}\right)^2}{L^2}$$

3. *Um punktmat og bilmat*

Punktmat á þýðisstærð er ein stærð sem byggð er á úrtaki, t.d. meðaltal eða hlutfall.
Bilmat er mat á því á hvaða bili þýðisstærð muni liggja miðað við tilteknar líkur. Um þetta má taka dæmi.

100 Íslendingar eru valdir af handahófi (random) og þungi þeirra mældur. Gerum ráð fyrir að meðalþungi sé 50 kg og staðalfrávik úrtaksins sé 10 kg. Hér er meðaltalið mat á meðalþunga allra Íslendinga eða vongildi þungans. 50 kg er því punktmat á meðalþunga Íslendinga.
Við sjáum að breytileikin er 100, þ.e. 10^2 og því um ákveðna óvissu að ræða. Því þarf að nota bilmat til að meta þessa óvissu.

Vitað er að meðaltal með svo mörgum mælingum er normaldreift með ákveðið staðalfrávik. Staðalfrávik meðaltalsins er reiknað á eftirfarandi hátt:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1$$

Þar með er vitað að 95% líkur eru á því að meðaltal með svo mörgum úrtaksstökum liggur á bilinu:

$$\overline{x} \pm Z_{0,025} \times S_{\overline{x}}$$

$$\Rightarrow 50 \pm 1,96 \times 1$$

$$\left[48,84;51,96\right]_{95\%}$$

Ef vitað er að úrtakið er 5% af þýðinu þá þarf að nota leiðréttingarstuðul. Þessi stuðull er þó oftast nálægt einum og hefur því óveruleg áhrif. Tökum þó dæmi.

Ef vitað er að þýðið telur aðeins 400 stök, t.d. nemendur TÍ og tekin eru 100 í úrtaki þá má ljóst vera að hlutfall úrtaks af þýði er > 5%. Því þarf að nota leiðréttingastuðul (FPC) til að fá réttara mat á öryggisbili

Notum sömu tölur og áður

$$\overline{x} \pm Z_{0,025} \times S_{\overline{x}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

$$\Rightarrow 50 \pm 1,96 \times 1 \times \sqrt{\frac{300}{399}}$$

$$\Rightarrow 50 \pm 1,96 \times 0,867$$

$$\left[48,3;51,7\right]_{95\%}$$

Niðurstaðan er því sú að leiðréttingastuðull gerir það að verkum að öryggisbilið þrengist.

4. Hlutfall, úrtaksstærð og öryggisbil

Ef gerð er viðhorfskönnun þar sem úrtakið er 100, 45% gefur upp svarið "JÁ" við spurningu og 55% gefur upp svarið "NEI". Er hægt að fullyrða með 95% vissu að meirihluti segi "NEI"?

Skoðum jöfnu fyrir öryggisbil þegar um hlutfall er að ræða:

$$P \in \hat{P}_x \pm Z^{\alpha}/_{2} * \sqrt{\frac{\hat{p}_x * \left(1 - \hat{p}_x\right)}{n}}$$

Nú má setja inn í þessa formúlu til að finna öryggisbil um hið mælda hlutfall.

$$P \in 0,55 \pm 1,96 * \sqrt{\frac{0,55 * 0,45}{100}}$$

$$\Rightarrow P \in 0,55 \pm 0,097$$

$$\Rightarrow P \in \left[0,45; 0,65\right]_{95\%}$$

Nú má sjá að það er ekki hægt að segja með 95% vissu að meirihluti þýðis segi "NEI", þ.e. hlutfallið gæti farið niður í 45%.

Nú má velta því fyrir sér hve stórt þyrfti úrtakið að vera svo sveiflan verði ekki meiri en ± 4%. Þetta má finna með því að setja inn í jöfnu fyrir úrtaksstærð.

$$n = \frac{0,25 * \left(Z^{\alpha}/_{2}\right)^2}{L^2}$$

Hér er L helmingur sveiflunnar sem miða skal við og þar sem verið er að finna 95% öryggisbil, þá verður Z-gildið 1,96.

$$n = \frac{0,25 * (1,96)^2}{0,04^2} = 600,25$$

Nú má prófa þetta:

Ef fyrrnefnd niðurstaða hefði grundvallast á úrtaki með 600 manns, hefði þá mátt fullyrða með 95% vissu að meirihluti segi "NEI"?

Setjum inn í jöfnu fyrir öryggisbil

$$P \in 0,55 \pm 1,96 * \sqrt{\frac{0,55 * 0,45}{600}}$$

$$\Rightarrow P \in 0,55 \pm 0,0398$$

$$\Rightarrow P \in [0,51;0,59]_{95\%}$$

Ef niðurstaðan hefði grundvallast af 600 manna úrtaki, þá hefði mátt fullyrða með 95% vissu að meirihluti þýðis segði "NEI".

5. *Krosskeyrslur (crosstabulation)*

Krosskeyrslur er einn mikilvægasti þátturinn í greiningu gagna. Hér er um að ræða öfluga en jafnframt einfalda aðferð við greiningu og úrvinnslu þeirra gagna sem eru fyrirliggjandi. Margar, ef ekki flestar, markaðsrannsóknir fara ekki lengra en þetta í greiningu þeirra gagna sem verið er að skoða hverju sinni. Margar aðrar greiningar eru til, s.s. fylgniútreikningar, ANOVA-greiningar, aðhvarfsgreiningar o.s.frv.

Hugmyndin á bakvið krosskeyrslur er, eins og nafnið bendir til, að krossa saman breytur, þ.e. ein breyta er keyrð saman við aðra eða fleiri breytur.

Skoðum nánar töfluna og veltum því fyrir okkur hvað töflurnar segja. Hér eru starfsmenn í stóru fyrirtæki beðnir um að segja skoðun sína á starfsandanum innan fyrirtækisins.

Hvernig líkar þér við starfsandann

Value Label	Frequency	Percent	Valid Percent	Cum Percent
Illa	4	4,6	4,6	4,6
Frekar illa	6	6,9	6,9	11,5
Hlutlaus	10	11,5	11,5	23,0
Frekar vel	21	24,1	24,1	47,1
Vel	27	31,0	31,0	78,2
Mjög vel	19	21,8	21,8	100,0
	87	100,0	100,0	

Nú kann að vera áhugavert að kanna hvort munur sé á viðhorfi karla og kvenna. Það má gera með einfaldri krosskeyrslu.

Hvernig líkar þér við starfsandann í fyrirtækinu?

Röð / Dálkur / Heildar	KYN: Karl	KYN: Kona	Röð samtals
Illa	1 25,0 9,1 1,1	3 75,0 3,9 3,4	4 4,6
Frekar illa		6 100,0 7,9 6,9	6 6,9
Hlutlaus	2 20,0 18,2 2,3	8 80,0 10,5 9,2	10 11,5
Frekar vel	2 9,5 18,2 2,3	19 90,5 25,0 21,8	21 24,1
Vel	5 18,5 45,5 5,7	22 81,5 28,9 25,3	27 31,0
Mjög vel	1 5,3 9,1 1,1	18 94,7 23,7 20,7	19 21,8
Dálkur Samtals	11 12,6	76 87,4	87 100,0

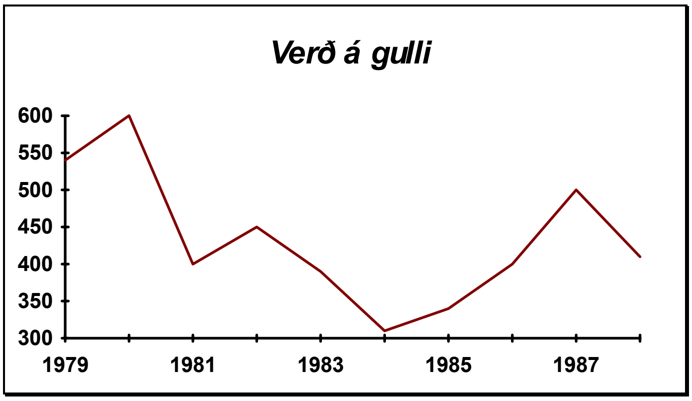
Til að lesa út úr töflunni skulum við skoða kassa 1, þ.e. þar sem “illa” og “karlar” skerast. Efst kemur talan 1 fyrir og táknar hún fjölda þeirra karla sem svöruðu “illa”. Næstu þrjár tölur eru hlutföll. 25.0 er fyrir röðina, þ.e. 25% sem svöruðu með “illa” voru karlar. 9.1 stendur fyrir dálkinn, þ.e. 9,1% karla svöruðu með “illa”. 1.1. stendur fyrir heildina, þ.e. 1,1% úrtaksins voru karlar sem svöruðu með “illa”. Svona má taka hvern kassa fyrir sig og draga ályktanir af þeirri skoðun. Í þessu dæmi er væntanlega verið að kanna hvort munur sé á viðhorfi karla og kvenna til starfsandans í fyrirtækinu.

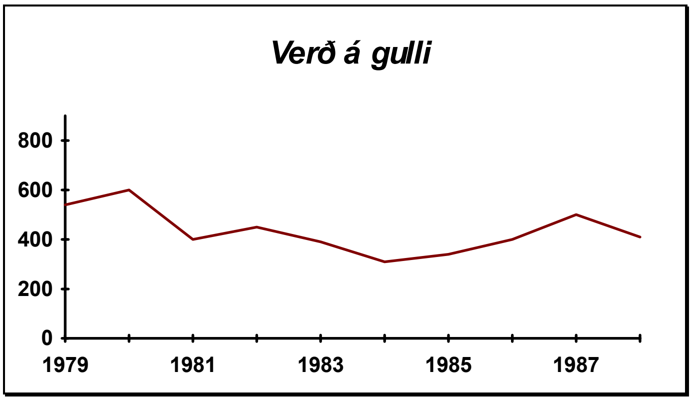
6. Myndræn framsetning gagna

Sagt hefur verið að góð mynd segi oft meira en þúsund orð. Myndir eru oftast heppilegri til að gera grein fyrir niðurstöðum en t.d. töflur. Skoðum helstu tegundir.

Línurit: Eru einföld og góð til að sýna þróun stærða yfir tímabil.
Kökurit: Notuð til að sýna hlutfallsskiptingu.
Súlurit: Hafa mikin sveigjanleika.

Eins og áður sagði geta myndir gert mikið gagn í þeim tilgangi að lýsa gögnum eða niðurstöðum. Myndir geta einnig gert mikið ógagn og dæmi eru um að myndir gefi ranga mynd af hegðun eða þróun stærða. Tökum dæmi:





Á fyrri myndinni virðist sem verð á gulli hafi sveiflast mjög mikið en á þeirri seinni ekki. Þó eru sömu tölur notaðar í báðum myndunum en annar skali. Það er því mikilvægt að velja réttan skala en mikilvæg er að hafa í huga tilurð, tilgang og markmið með þeim gögnum sem verið er að fjalla um hverju sinni.

7. Lýsing gagna (Descriptive Statistics)

7.1. Staðsetning gagna.

Meðaltal:

$$Me\eth altal = \overline{x} = \frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}$$

þar sem x_i er niðurstaða úr n mælingum.

Miðtala:

M_d er sú tala sem skiptir röðuðum gögnum upp í tvo jafn stóra hópa, þannig að 50% gagnanna sé minni eða jöfn M_d. Miðtala er stundum táknuð Q_2.

Hátíðnitala:

M_o, stundum talað um tíðasta gildi, er sú tala sem oftast kemur fyrir meðal gagna.

Miðleitni

Meðaltal, miðtala og tíðasta gildi eru tölur sem allar eru mælikvarði á miðleitni eða miðju gagna, þ.e. miðjumat fyrir þýðið.

Ef dreifing gagna er samhverf, þá er oft eðlilegt að nota meðaltal sem lýsingu á miðju. Ef svo er ekki, t.d. ef um launadreifingu er að ræða, þá gæti miðtala verið eðlilegri lýsing á staðsetningu. Í tíðnimælingum getur tíðasta gildið verið mikilvægari lýsing á miðju.

7.2. Breytileiki eða dreifni

Breytileiki fyrir úrtak:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(xi - \overline{x})^2}{n-1}$$

Breytileiki er mælikvarði á óvissu. Eftir því sem breytileikin er hærri, því meiri óvissa. Staðalfrávikið er kvaðratrótin af breytileikanum.

Breytileikastuðull:

$$B = \frac{s}{\overline{x}} * 100$$

Breytileikastuðull er hentugur þegar bera þarf saman breytileika í þýðum þar sem gögnin eru ekki sett fram í sömu einingum.

8. Almennt um öryggisbil og nokkrar tegundir

8.1. Normaldreifð gögn:

Ef gögn eru nokkurn veginn normaldreifð, þá gildir eftirfarandi:

$[\overline{x} - s; \overline{x} + s]$ Inniheldur um 68% gagna

$[\overline{x} - 2s; \overline{x} + 2s]$ Inniheldur um 95% gagna

$[\overline{x} - 3s; \overline{x} + 3s]$ Inniheldur um 99% gagna

8.2. Um Z-gildi

Z-gildi er tala sem notuð er til að tákna staðsetningu á normalkúrfu. Z-gildið dreifist normal með meðaltalið 0 og staðalfrávikið 1. Hér er um að ræða s.k. staðal normaldreifingu.

$$Z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s}$$

Z-gildi lýsir fráviki frá meðaltali mældu í staðalfrávikum

8.3. Alfa-gildi

Alfa-gildið er mælikvarði á s.k. vikmörk, þ.e. það flatarmál sem ekki lendir innan þess flatarmáls sem Z-gildið afmarkar.

$$1 - \alpha = \text{Öryggisbil}$$
$$P(A < \theta < B) = 1 - \alpha$$

Til að auðvelda og einfalda meðhöndlun og val á réttum gildum, er hægt að setja upp töflu.

a) Tveggja hala bil

$\alpha/2$	0,005	0,01	0,025	0,05
Z	2,575	2,33	1,96	1,645
Vissa $(1-\alpha)$	99%	98%	95%	90%

a) Eins hala bil

α	0,01	0,05	0,01	
Z	2,33	1,64	1,28	
Vissa (1-α)	99%	95%	90%	

Breytingar og áhrif (almennt)

Ef stærðirnar n, σ og 1-α breytast, hvaða áhrif hefur það á öryggisbilið?

Tökum dæmi: (á við þegar staðalfrávik þýðis er þekkt)

Pakkaður er sykur. Þyngd er normaldreifð með staðalfrávikið 1,2 kg. Tekið er sýni með 25 stökum og er meðalþyngd 19,8 kg. Nú skal finna 95% öryggisbil fyrir meðalþyngd framleiðslunnar.

8.4. Jafna fyrir öryggisbil, staðalfrávik þýðis þekkt.

$$\mu \in \overline{x} \pm \frac{Z_{\alpha/2} \times \sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow \mu \in 19{,}8 \pm \frac{1{,}96 \times 1{,}2}{\sqrt{25}}$$
$$\Rightarrow \mu \in [19{,}33; 20{,}27]_{95\%}$$

Ef n $\uparrow$ og verður 64, þ.e tekin eru fleiri sýni, hvaða áhrif hefur það á öryggisbilið?

$$\mu \in \overline{x} \pm \frac{Z_{\alpha/2} \times \sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow \mu \in 19{,}8 \pm \frac{1{,}96 \times 1{,}2}{\sqrt{64}}$$
$$\Rightarrow \mu \in [19{,}51; 20{,}09]_{95\%}$$

Við sjáum að öryggisbilið þrengist og því eykst nákvæmnin. Það má því segja að eftir því sem n er stærra, því nákvæmari mælingar.

Ef σ ↑ og verður 2, hvað áhrif hefur það á öryggisbilið?

$$\mu \in \overline{x} \pm \frac{Z_{\alpha/2} \times \sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow \mu \in 19{,}8 \pm \frac{1{,}96 \times 2}{\sqrt{25}}$$
$$\Rightarrow \mu \in [19{,}02; 20{,}58]_{95\%}$$

Við sjáum að öryggisbilið stækkar og ónákvæmni eykst. Því má segja að eftir því sem staðalfrávik er stærra, því meiri ónákvæmni.

Ef 1-α - og verður 99%, þ.e. Z-gildið verður 2,575, hvaða áhrif hefur það á öryggisbilið?

$$\mu \in \overline{x} \pm \frac{Z_{\alpha/2} \times \sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow \mu \in 19{,}8 \pm \frac{2{,}575 \times 1{,}2}{\sqrt{25}}$$
$$\Rightarrow \mu \in [19{,}18; 20{,}42]_{99\%}$$

Við sjáum að öryggisbilið stækkar.

Í framangreindum dæmum er gengið út frá því að staðalfrávik þýðis (s) sé þekkt. Nú er svo sjaldnast í raunveruleikanum og því þarf að styðjast við staðalfrávik úrtaksins í útreikningum. Jafnframt þurfa úrtök að vera stór, þ.e. stærri en 30.

8.5. Öryggisbil fyrir meðaltal þýðis, stór úrtök

$$\mu \in \overline{x} \pm \frac{Z_{\alpha/2} \times S_x}{\sqrt{n}}$$

Tökum dæmi:

1562 stúdentar voru beðnir um að taka afstöðu á sjö stiga skala, frá einum (m.ósammála) til sjö (m.sammála), til eftirfarandi fullyrðingar:

> ***"Flestar auglýsingar eru trúverðugar og gefa rétta mynd af því sem verið er að auglýsa"***

Niðurstaðan varð eftirfarandi:

Meðaltalið varð 3,92, staðalfrávikið 1,57 og fjöldi svara var 1562. Nú skal finna 99% öryggisbil fyrir meðaltal þýðis.

$$\mu \in \overline{x} \pm \frac{Z_{\alpha/2} \times S_x}{\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow \mu \in 3,92 \pm \frac{2,575 \times 1,57}{\sqrt{1562}}$$
$$\Rightarrow \mu \in [3,82; 4,02]_{99\%}$$

Ef aðeins 100 nemendur hefðu verið í úrtaki, hver hefði niðurstaðan orðið ef finna skal 95% öryggisbil?

ATH! ef n ↓ þá er líklegt að S_X ↑. Gerum því ráð fyrir að Sx sé 2 í stað 1,57

$$\mu \in \overline{x} \pm \frac{Z_{\alpha/2} \times S_x}{\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow \mu \in 3,92 \pm \frac{1,96 \times 2}{\sqrt{100}}$$
$$\Rightarrow \mu \in [3,53; 4,31]_{95\%}$$

Við sjáum að öryggisbilið stækkar og því eykst ónákvæmni. Nú er spurningin hvort að nákvæmnin sé næg. Til að svara því þarf að hafa í huga markmið könnunar.

8.6. Jafna fyrir öryggisbil, lítil úrtök og x dreifist normal

Ef dreifing á x er óþekkt en n > 30, þá dreifist meðaltalið normal.
Ef σ er óþekkt en n > 30 þá dreifist meðaltalið einnig normal.
Ef n < 30 og x dreifist normal, þá dreifist meðaltalið samkvæmt t - dreifingu með n-1 frelsisgráður.

Ef x dreifing er óþekkt, s er óþekkt og n < 30 þá er dreifing meðaltalsins einnig óþekkt.

$$\mu \in \overline{x} \pm t_{n-1,\alpha/2} \times \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

Til að finna t-gildið þá þarf að fara í töflur sem innihalda slík gildi.

Tökum dæmi

Verslun hér í bæ hefur áhuga á því að kanna eyðslu nemenda í föt í upphafi skólaárs. Tekin voru viðtöl af handahófi við 9 nemendur og kom í ljós að meðaleyðsla var 11.047 kr. og reyndist staðalfrávikið vera 2.722. Ef eyðslan dreifist normal, hvert er 95% öryggisbil fyrir meðaleyðslu nemenda í föt?

Lausn

Við vitum að dreifing er normal, breytileiki þýðis er óþekktur og n < 30 og því er um t-dreifingu að ræða.

Byrja á því að finna t-gildi með n-1 frelsisgráðu og 95% öryggisbil.
(úr töflu)

Sjá má að t-gildið er 2,306. Nú er hægt að setja inn í jöfnuna.

$$\mu \in 11047 \pm 2,306 \times \frac{2722}{\sqrt{9}}$$
$$\Rightarrow \mu \in [8954;13139]_{95\%}$$

Tökum annað dæmi

Bifreiðaumboð hefur áhuga á að kanna eyðslu bifreiðategundar sem flutt er inn af umboðinu. Mæld var eyðsla sex bíla sem valdir voru af handahófi og kom í ljós að eyðsla p/100 km var eftirfarandi (í lítrum)

xi	xi^2
18,6	345,96
18,4	338,56
19,2	368,64
20,8	432,64
19,4	376,36
20,5	420,25
116,9	2282,41

Finna skal öryggisbil með 90% vissu, nota skal t-dreifingu

Lausn

Hér þarf að byrja á því að reikna meðaltal og staðalfrávik.

Jafna fyrir meðaltal

$$\overline{x} = \tfrac{1}{n} \times \sum x_i$$

Jafna fyrir staðalfrávik (breytileika)

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \times \left(\sum x_i^2 - n\overline{x}^2 \right)$$
$$\Rightarrow S_x^2 = \frac{1}{5} \times \left(2282{,}41 - 6 \times 19{,}4833^2 \right)$$
$$\Rightarrow S_x^2 = 0{,}963$$
$$\Rightarrow S_x = \sqrt{0{,}963} = 0{,}98$$

Nú er vitað að fjöldinn er 6, meðaltalið er 19,4833 og staðalfrávikið er 0,98. Nú má setja inn í t-jöfnuna.

$$\mu \in \overline{x} \pm t_{n-1,\alpha/2} \times \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow \mu \in 19{,}483 \pm 2{,}015 \times \frac{0{,}98}{\sqrt{6}}$$
$$\Rightarrow \mu \in 19{,}4833 \pm 0{,}806$$
$$\Rightarrow \mu \in [18{,}67; 20{,}29]_{90\%}$$

8.7. Öryggisbil fyrir hlutfall þýðis, stór úrtök (> 40)

$$P \in \hat{P}_x \pm Z^{\alpha}\!/_2 * \sqrt{\frac{\hat{p}_x * (1 - \hat{p}_x)}{n}}$$

Dæmi:

344 í úrtaki, 83 velja A. Finna skal 90% öryggisbil

$$P \in \hat{P}_x \pm Z^{\alpha}\!/_2 \times \sqrt{\frac{\hat{p}_x \times (1 - \hat{p}_x)}{n}}$$
$$\Rightarrow P \in 0{,}241 \pm 1{,}645 \times \sqrt{\frac{0{,}241 \times 0{,}759}{344}}$$
$$\Rightarrow P \in [0{,}203; 0{,}279]_{90\%}$$

8.8. Öryggisbil fyrir mismun meðaltala tveggja hópa sem dreifast normal

8.8.1. Pöruð úrtök

Hér er verið að mæla t.d. lestrarhraða hóps fyrir hraðlestrarnámskeið og svo lestrarhraða sama hóps eftir námskeið. Hér er því verið að meta ávinning námskeiðsins. Útreikningur er með eftirfarandi hætti:

$$\mu_x - \mu_y \in \bar{x} - \bar{y} \pm t_{n-1, \alpha/2} \times \frac{Sd}{\sqrt{n}}$$
$$Sd^2 = \frac{1}{n-1} \times \left(\sum_{i=1}^{n} d_1^2 - n\bar{d}^2 \right)$$
$$d_i = x_i - y_i$$
$$\bar{d} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} d_i$$

Þar sem um langa, tímafreka og oft ruglingslega útreikninga er að ræða, verður ekki farið nánar út í þessa hluti hér.

8.8.2. Óháð úrtök

Hér er um að ræða óháð úrtök, þurfa að vera stór eða með þekktan breytileika. Dæmi um slík úrtök eru karlar/konur, reykingamenn/reykja ekki o.s.frv.

Jafna fyrir mismun meðaltala þegar um óháð úrtök er að ræða, er eftirfarandi:

$$\mu_x - \mu_y \in \bar{x} - \bar{y} \pm Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

Hér skal taka dæmi:

x = reykingamenn, fjöldi í úrtaki er 96, meðaltal er 2,15 og staðalfrávikið 2,09
y= reyklausir, fjöldi í úrtaki er 206, meðaltal er 1,69 og staðalfrávikið 1,91

Hér er meðaltalið mælikvarði á meðalfjarvistir úr vinnu á viku.

Vinnuveitandi vill nú kanna hvort að munur sé á þessum hópum, þ.e. er hugsanlegt að reykingamenn séu að jafnaði meira frá vinnu en þeir sem eru reyklausir. Finna skal 99% öryggisbil.

Þar sem úrtökin eru stór má nota breytileika úrtaka í stað breytileika þýðis sem er óþekktur.

Nú má setja inn í jöfnuna:

$$\begin{aligned}
&\mu_x - \mu_y \in \bar{x} - \bar{y} \pm Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}} \\
&\Rightarrow \mu_x - \mu_y \in 2,15 - 1,69 \pm 2,575 \times \sqrt{\frac{4,37}{96} + \frac{3,65}{206}} \\
&\Rightarrow \mu_x - \mu_y \in [0,46 \pm 0,648] \\
&\Rightarrow \mu_x - \mu_y \in [-0,188; 1,108]_{99\%}
\end{aligned}$$

Hver er þá niðurstaðan? Er munur á þessum hópum? Þar sem 0 er innan öryggisbilsins, þá er ekki hægt að segja með 99% vissu að munur sé á x og y.

Hver yrði niðurstaðan ef miða ætti við 90% öryggisbil?

$$\mu_x - \mu_y \in \bar{x} - \bar{y} \pm Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}$$

$$\Rightarrow \mu_x - \mu_y \in 2{,}15 - 1{,}69 \pm 1{,}645 \times \sqrt{\frac{4{,}37}{96} + \frac{3{,}65}{206}}$$

$$\Rightarrow \mu_x - \mu_y \in [0{,}46 \pm 0{,}41]$$

$$\Rightarrow \mu_x - \mu_y \in [0{,}046; 0{,}874]_{90\%}$$

Hér er 0 ekki innan öryggisbilsins og því má segja með 90% vissu að munur sé á x og y.

8.9. Öryggisbil fyrir mismun tveggja hlutfalla, óháð úrtök

$$P_x - P_y \in \hat{p}_x - \hat{p}_y \pm Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\hat{p}_x \times (1 - \hat{p}_x)}{n_x} + \frac{\hat{p}_y \times (1 - \hat{p}_y)}{n_y}}$$

Tökum dæmi:

Hópur x og hópur y.

nx er 92, já segja 53.3%
ny er 86, já segja 41,9%

Segið til með 90% vissu hvort að munur sé á þessum hópum.

Setjum inn í jöfnuna:

$$P_x - P_y \in 0,533 - 0,419 \pm 1,645 \times \sqrt{\frac{0,533 \times 0,467}{96} + \frac{0,419 \times 0,581}{86}}$$
$$\Rightarrow P_x - P_y \in [0,114 \pm 0,1224]$$
$$\Rightarrow P_x - P_y \in [-0,008; 0,236]_{90\%}$$

Þar sem 0 kemur fyrir innan öryggisbilsins, þá er ekki hægt að segja með 90% vissu að munur sé á þessum hópum, þ.e. mismunur getur verið 0.

9. Um tilgátupróf

Oft þarf að framkvæma marktæknirannsóknir með það í huga að prófa tilgátu um þýðið. Tilgátuprófun hefst með því að mótuð er hugmynd sem byggist á ákveðnum forsendum. Þessi hugmynd nefnist tilgáta eða "Hypothesis testing" og fyrirbærið því oft kallað "thesa" á vondu máli.

Næsta skref er að velja handahófsúrtak og út frá niðurstöðum þess er réttmæti tilgátunnar metin. Þetta leiðir hugann að því að ef búið er að taka handahófsúrtak, gera á því rannsókn og fá fram niðurstöður án þess að tilgáta hafi verið sett fram, geta komið upp vandamál. Hér er átt við vandamál eins og þau að rannsóknin sem slík svari ekki þeim spurningum sem óskað er eftir, einfaldlega vegna þess að þær voru ekki fram bornar. Þetta atriði er því mjög mikilvægt við hönnun spurningalista, þ.e. spurningarnar verða að gefa upplýsingar sem nota má til að meta tiltekna tilgátu. Það á því ekki að afla upplýsinga upplýsinganna vegna, heldur í ákveðnum tilgangi. Að öðrum kosti getur það gerst að til er mikið magn upplýsinga sem enginn veit hvað skal gera við.

Það þarf því að vera ljóst í huga þess sem spyr, hvað það er sem hann vill vita, því ef spurning er ekki borin fram, þá þarf heldur ekki að búist við því að fá svar við henni.

Tilgátan felur í sér ályktun um þýðið. Eftir að úrtak hefur verið valið og niðurstöður þess fundnar, er reiknað hversu líklegt hafi verið að fá úrtak með þessum niðurstöðum miðað við að ályktun um þýðið sé rétt. Ef niðurstaða úrtaksins er mjög líkleg, þá er ekki hægt að hafna henni en ef niðurstaðan er ólíkleg þá ber að hafna tilgátunni.

Hafa þarf í huga að tilgáta er <u>ekki</u> sönnuð eða afsönnuð, heldur er tilgátu hafnað eða henni verður ekki hafnað, þ.e. þó svo að ekki sé hægt að hafna tilgátu þá er ekki þar með sagt að eitthvað hafi verið sannað með tölfræðilegum rökum.

9.1. Framsetning tilgátu

Við tilgátuprófun er stillt upp tveimur tilgátum, H_0 og H_1. Þessar tilgátur verða að vera í röklegri andstöðu við hvor aðra, þ.e. ef H_0 er sönn, þá verður H_1 að vera ósönn.

Núlltilgátan, táknuð með H_0, skilgreinir einkennistölu þýðisins sem ætlunin er að rannsaka. Sem dæmi þá má hugsa sér að verið sé að kanna hvort meðaltal sé af tiltekinni stærð.

Varatilgátan, táknuð með H_1, er tekin upp þegar úrtaksrannsókn styður ekki núlltilgátuna. Sem dæmi þá væri varatilgátan sú að meðaltal sé ekki af tiltekinni stærð.

Einnig þarf að skilgreina við hvaða öryggisbil er miðað.

Algengur framsetningarmáti er eftirfarandi:

H_0; $\mu = 25.000$
H_1; $\mu \neq 25.000$ $\alpha = 0,05$

Hér er tilgátan sú að meðaltal þýðisins geti verið 25.000 m.v. 95% öryggismörk. Varatilgátan er sú að meðaltalið geti ekki verið 25.000.

9.2. Máttur tilgáuprófa

Samkvæmt því sem áður hefur komið fram, er núlltilgátan hrakin eða studd, en ekki sönnuð eða afsönnuð. Tvenns konar mistök eða villur geta átt sér stað í tölfræðilegri ályktun.

Höfnunarvilla, s.k. Type I error, er það nefnt þegar núlltilgátan er ranglega hrakin. Líkurnar á þessu eru α í venjulegu tilgátuprófi þar sem vikmörkin eru α.

Samþyktarvilla, s.k. Type II error, er það nefnt þegar núlltilgátan er ranglega studd. Venja er að tákna líkurnar á þessari villu með β.

Stærðin 1-β eru líkurnar á því að hafna rangri tilgátu. Hún er því mælikvarði á það hversu öflugt próf er. Þess vegna er 1-β nefnt máttur tilgátuprófs miðað við tiltekið μ. Nú væri hægt að halda nokkuð lengi áfram á þessum fræðilegu nótun en það ekki talið hafa hagnýt gildi að svo stöddu. Þess í stað skal tekið einfald dæmi, viðfangsefninu til útskýringar.

Dag einn þegar þú ætlar að fara að heiman, stendur þú frammi fyrir þeirri ákvörðun hvort þú eigir að taka með þér regnhlíf eða ekki. Til að hjálpa þér við að taka þessa ákvörðun, aflar þú þér upplýsinga. Upplýsingarnar geta verið veðurfregnir sem gefa til kynna hvernig veður verður þennan tiltekna dag.

Nú er í raun um tvo valkosti að ræða. Ef þú telur að upplýsingarnar gefi til kynna að það muni rigna, þá tekur þú regnhlíf með þér í skólann. Ef þú hins vegar telur að það muni ekki rigna, þá tekur þú ekki með þér regnhlíf. Út úr þessari greiningu geta verið fjórar niðurstöður.

	Atburður	***Ekki rigning***	***Rigning***
Ákvörðun	***Tekur með sér regnhlíf***	Höfnunarvilla α	Rétt ákvörðun 1-α
	Tekur ekki með sér regnhlíf	Rétt ákvörðun 1-β	Samþykktarvilla β

Um tveggja hala öryggisbil gildir eftirfarandi:

$$
\begin{aligned}
&1.\left|\mu-\mu_0\right|\uparrow \Rightarrow \beta\downarrow \Rightarrow (1-\beta)\uparrow\\
&2.\alpha\downarrow \Rightarrow \beta\uparrow \Rightarrow (1-\beta)\downarrow\\
&3.\sigma\uparrow \Rightarrow \beta\uparrow \Rightarrow (1-\beta)\downarrow\\
&4.n\uparrow \Rightarrow \beta\downarrow \Rightarrow (1-\beta)\uparrow
\end{aligned}
$$

9.3. Aðferðir við framkvæmd tilgátuprófa

Aðferðir eru nokkrar en hér verða kynntar tvær. Hugsum okkur að framleiðandi á niðursoðnum fiskbúðing haldi því fram að þyngdin sé 500 grömm. Hann stillir upp eftirfarandi tilgátu:

H_0; μ = 500
H_1; μ ≠ 500 α = 0,05

Nú er tekið úrtak úr framleiðslunni af handahófi og eru 36 stök í úrtakinu. Niðurstöður mælinga urðu eftirfarandi:

$$n = 36$$
$$\overline{x} = 450$$
$$S_x = 72$$

Nú er í raun hægt að velja um tvær aðferðir til að kanna þessa tilgátu.

Aðferð 1

Aðferð 1 gengur út á að finna öryggisbil um hið mælda meðaltal og kanna hvort að fræðilega gildið, þ.e. μ lendi innan bilsins. Hér eiga kunnugleg atriði að vera á ferðinni.

$$\mu \in \overline{x} \pm \frac{Z_{\alpha/2} \times S_x}{\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow \mu \in 450 \pm \frac{1,96 \times 72}{\sqrt{36}}$$
$$\Rightarrow \mu \in [426,48;473,52]_{95\%}$$

Nú má sjá að það má hafna H_0 með 95% vissu.

Aðferð 2

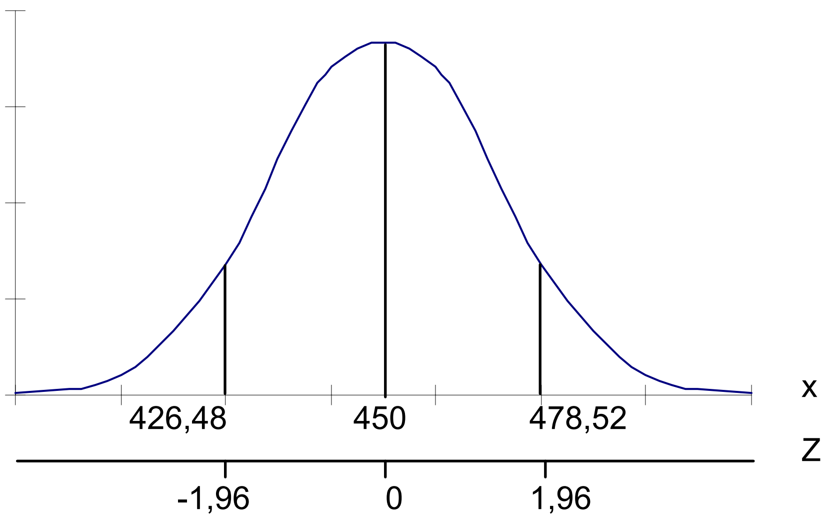
Aðferð 2 gengur út á það að reikna út s.k. reiknað Z-gildi, oft kallað Z með hatti, og bera það við töflugildi. Við vitum að Z er staðalnormaldreift með meðaltalið 0 og staðalfrávikið 1.

$$\hat{Z} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S_x}{\sqrt{n}}}$$

$$\Rightarrow \hat{Z} = \frac{450 - 500}{\frac{72}{\sqrt{36}}} = -4,17$$

Nú má bera útreiknaða gildið saman við töflugildi, en fyrir 95% öryggismörk þá er viðmiðunargildið 1,96. Hér lendir reiknaða gildið út fyrir töflugildið og því ber að hafna H_0.

Gott er að skoða þetta á mynd



Báðar aðferðirnar eru jafngildar en í framhaldinu verður sú seinni notuð

9.4. Nokkur tilgátupróf og ákvarðanir

Hér skal það tekið strax fram að þau tilgátupróf sem verða kynnt hér á eftir, eru ekki tæmandi og fjöldinn allur til af tilgátuprófum sem ekki verður fjallað um hér og munu þau því bíða betri tíma.

9.4.1. Stór úrtök (n > 30)

$H_0;\ \mu = \mu_0$	
$H_1;\ \mu \neq \mu_0$	α

$$\hat{Z} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S_x}{\sqrt{n}}}$$

Ef reiknaða Z lendir innan ± töflugildis, þá er ekki hægt að hafna H_0.
Ef reiknaða Z lendir utan ± töflugildis, þá er hægt að hafna H_0.

9.4.2. Lítil úrtök (n<30), x normaldreift, σ óþekkt

$H_0;\ \mu = \mu_0$	
$H_1;\ \mu \neq \mu_0$	α

$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S_x}{\sqrt{n}}}$$

Ef reiknaða t lendir innan ± töflugildis, þá er ekki hægt að hafna H_0.
Ef reiknaða t lendir utan ± töflugildis, þá er hægt að hafna H_0.

Dæmi

Eigandi verslunarkeðju telur að meðalsala í verslunum sínum sé 20% hærri í desember en í nóvember. Valdar eru sex verslanir af handahófi og kom í ljós að söluaukning varð eftirfarandi:

19,2 18,4 19,8 20,2 20,4 19,0

Nú skal kanna tilgátu eigandans þess efnis að meðal sala sé 20% hærri í desember en í nóvember. Þýðið dreifist normal og miða skal við 90% öryggismörk.

Með útreikningum má fá að meðaltalið er 19,5 og staðalfrávikið er 0,767.

Nú má stilla upp tilgátunni

H_0; $\mu = 20$
H_1; $\mu \neq 20$ $\alpha = 0{,}1$

Finnum reiknað t

$$\hat{t} = \frac{19{,}5 - 20}{\frac{0{,}767}{\sqrt{6}}} = -1{,}597$$

Nú skal bera þetta gildi við $t_{-1,\alpha/2} = 2{,}015$

Nú má sjá að reiknaða gildið lendir innan töflugildis og því er ekki hægt að hafna tilgátu eigandans, þ.e. hann getur haldið því fram með 90% vissu að sala sé 20% meiri í desember en í nóvember. Ath! Til að átta sig á þessum hlutum er gott að rissa upp mynd.

9.4.3. Hlutföll (n>40) ath.

H_0; $p = p_0$
H_1; $p \neq p_0$ α

$$\hat{Z} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Ef reiknaða Z lendir innan ± töflugildis, þá er ekki hægt að hafna H_0.
Ef reiknaða Z lendir utan ± töflugildis, þá er hægt að hafna H_0.

Dæmi

Tekið var úrtak af handahófi úr þýðinu hluthafar XYZ hf. Í úrtaki vöru 199 einstaklingar og voru þeir beðnir um að taka afstöðu til eftirfarandi fullyrðingar: ***Greiðslustreymi er góður mælikvarði á arðsemi***.

Kannið með 90% vissu þá tilgátu að helmingur sé þessu sammála.

Stilla upp tilgátunni

H_0; $p = p_0 = 0{,}5$
H_1; $p \neq 0{,}5$ $\alpha = 0{,}1$

Niðurstaða mælinga varð sú að 104 voru þessu sammála. Nú má setja inn í formúlu.

$$\hat{Z} = \frac{0{,}523 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}5(0{,}5)}{199}}} = 0{,}65$$

Viðmiðunargildið er 1,645 og því lendir mælda gildið fyrir innan mörkin og því er ekki hægt að hafna tilgátu þess efnis að helmingur hluthafa sé fullyrðingunni sammála.

9.4.4. Samanburður meðaltals, óháð úrtök, þekktur breytileiki eða stór úrtök,

H_0; $\mu_1 = \mu_2$
H_1; $\mu_1 \neq \mu_2$ α

$$\hat{Z} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - 0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Ef reiknaða Z lendir innan ± töflugildis, þá er ekki hægt að hafna H_0.

Ef reiknaða Z lendir utan ± töflugildis, þá er hægt að hafna H_0.

10. Kynning á fylgni og aðhvarfsgreiningu

Í tölfræðigreiningu þarf oft að reikna fylgni milli tveggja eða fleiri stærða. Fylgnirannsóknir hjálpa til við að ákveða hve mikil tengsl eru milli stærða og stuðla þannig að betri skilningi á ýmsum málum.

Til dæmis var eitt sinn kannað hvort fylgni væri á milli vinsælda einstakra stjórnmálamanna og þess fylgis sem flokkur viðkomandi hafði. Í ljós kom að svo var ekki.

Fylgnistuðull er tala sem segir til um að hve miklu marki tvær breytur tengjast. Til eru margar tegundir af fylgnistuðlum, s.s. Pearson r og Spearman r.

Þótt til séu margar gerðir af fylgnistuðlum eru ákveðnir þættir sameiginlegir þeim öllum:

1. Gildi fylgnistuðla liggur á milli +1 og -1. Þessar tvær tölur sína fullkomna fylgni milli stærða og 0 sýnir enga fylgni.

2. Jákvæð fylgni felur í sér að einstaklingar með hátt skor á annarri breytunni, eru líklegir til að fá hátt skor á hinni og öfugt.

3. Neikvæð fylgni felur í sér að einstaklingar með lágt skor á annarri breytunni, eru líklegir til að fá hátt skor á hinni breytunni og öfugt.

Útreikningur á fylgnistuðli (Pearson r)

$$r = \frac{\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 * \sum_{1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

Til að reikna þetta er einfaldast að setja upp töflu:

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})*(y-\bar{y})$
2	3	-1,67	-1,00	2,78	1,00	1,67
2	4	-1,67	0,00	2,78	0,00	0,00
3	1	-0,67	-3,00	0,44	9,00	2,00
4	6	0,33	2,00	0,11	4,00	0,67
5	8	1,33	4,00	1,78	16,00	5,33
6	2	2,33	-2,00	5,44	4,00	-4,67
3,67	4,00	0,00	0,00	13,33	34,00	5,00

$$\Rightarrow r = \frac{5}{\sqrt{13,33*34}} = 0,235$$

Nú má setja fram tilgátu.

H_0: $\rho = 0$
H_1: $\rho \neq 0$ $\alpha = 0,05$

Þ.e. er hugsanlegt að fylgnin sé 0.
Hér er notað t-próf.

$$\hat{t} = \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} * r$$

$$\Rightarrow \hat{t} = \sqrt{\frac{4}{1-0,235^2}} * 0,235 = 0,484$$

Reiknaða gildið er borið við $t_{n-2,\alpha/2}$ eða $t_{4,0,05} = 2,776$

Hér má sjá að reiknaða gildið er minna en töflugildið og því er ekki hægt að hafna H_0, þ.e. það er hugsanlegt að fylgni sé 0.

10.1. Aðhvarfsgreining

Líkan (línulegt)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_i$$

Aðferð minnstu fervika gefur "bestu" línu, þ.e.

$$Y = b_0 + b_1 x$$

Grunnjöfnur:

$$b_1 = \frac{\sum_1^n (x - \bar{x}) * (y - \bar{y})}{\sum_1^n (x - \bar{x})^2}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 * \bar{x}$$

Nú má setja inn í þessar jöfnur stærðir úr töflunni sem sett var upp hér að framan.

$$\Rightarrow b_1 = \frac{5}{13,33} = 0,375$$

og $b_0 = 4 - 0,375 * 3,67 = 2,62$

$$y = 2,62 + 0,375 x_i$$

Áður hefur verið sýnt fram á að fylgnin getur verið jafnt og 0 og því er afar ólíklegt að hér sé um marktæka stuðla að ræða. Næsta skref væri því að gera tilgátupróf um stuðla og ef stuðlarnir væru fleiri en einn, þá þyrfti að henda út ómarktækum stuðlum. Frekari umfjöllum um þetta viðfangsefni verður látið bíða betri tíma.

Lifið heil!